Zur Konstruktion einer Kontur, die durch Polarkoordinaten beschrieben wird und aus Bogen besteht, sind folgende mathematischen Beziehungen von großer Bedeutung:

Die allgemeine Gleichung mit dem Mittelpunkt und und dem konstanten Radius eines Kreises im kartesischen Koordinatensystem lautet:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

Bei der Transformierung vom kartesischen in den polaren Raum wird eine Koordinatentransformation durchgeführt, in der x und y als eine Beziehung vom Radius R und Winkel Theta ausgedrückt werden soll. Dazu wird die Position eines Punktes im 2-dimensionalen Raum betrachtet (Abbildung 1).

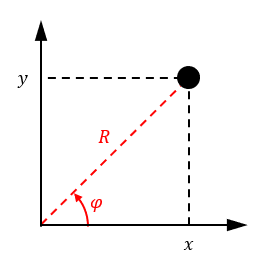


Abbildung 1: Transformation von kartesischem zu polarem Koordinatensystem

Die x und y Koordinaten können anhand trigonometrischer Zusammenhänge folgend ausgedrückt werden:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2) |
|  | (3) |

Die Substitution von und der Gleichung (1) durch (2) und (3) liefert:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4) |

Diese Gleichung muss nun nach explizit umgeformt werden. Dazu wird sie vorerst bei (5) vereinfacht:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5) |

Da sich herausgestellt hat, dass es quadratische Gleichungen ist, wird es demzufolge zwei Lösungen haben, die die untere und obere Hälfte des Kreises beschreiben. Diese Lösungen lauten:

Es wurden nun zwei explizite Gleichungen gefunden, die von dem Winkel abhängen. Um jedoch die kinematische Charakteristik bestimmen zu können muss die Gleichung in Abhängigkeit von der Zeit ausgedrückt werden. Dazu wird durch ersetzt, wobei die konstante Winkelgeschwindigkeit bezeichnet:

Durch diese beiden Gleichungen kann nun im polaren Koordinatensystem ein beliebig großer Kreis an einer beliebigen Stelle dargestellt werden.

Da die Kontur nun aber aus verschiedenen Kreisen an unterschiedlichen Stellen besteht müssen Gültigkeitsbereiche bestimmt werden, welche definieren in welcher Sequenz welche Kreisgleichung gilt.

Dies kann durch ein Tiefpassfilter realisiert werden, der die jeweilige Sequenz des Kreisabschnittes nur in den vorgegebenen Winkeln und abbildet (Gleichung (5)). Zu achten ist dabei, dass diese Winkel

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4) |
|  | (4) |
|  |  |

Die Multiplikation von oder und gibt nun genau den Abschnitt des Kreises der zwischen den Winkeln und liegt.

Für die Zusammensetzung dieser einzelnen Kreisabschnitte zur Kontur müssen diese Multiplikationen nur noch addiert werden.

ist nun eine Gleichung, die sagen kann, bei welcher Zeit welcher Abschnitt der Kontur bei konstanter Winkelgeschwindigkeit erreicht wird.

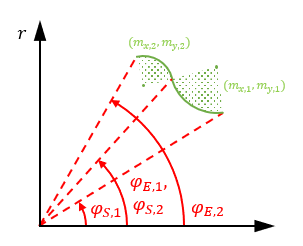


Abbildung 2: Darstellung der einzelnen Sequenzen

Um die Geschwindigkeit und die Beschleunigung zu finden kann mithilfe von verschiedenen Tools die Gleichung der Kontur sehr unkompliziert abgeleitet werden.